

La sección, cuya forma y dimensiones, se indican en la figura II-30, está sometida a un momento flector  $\vec{M}$  aplicado en su centro de gravedad  $O$  y formando  $30^\circ$  en sentido negativo, con la horizontal.

Las tensiones admisibles del material son:

a compresión  $\sigma_c = 100 \text{ kg/cm}^2$

a tracción  $\sigma_T = 60 \text{ kg/cm}^2$ .

Se pide:

Valor máximo de  $|\vec{M}|$  que puede soportar la pieza.

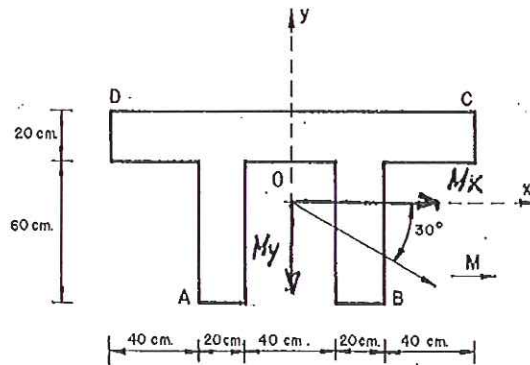


Fig. II-30

Resolución:

Los ejes  $Ox$ ,  $Oy$  son principales de inercia puesto que el eje  $Oy$  es de simetría. Por tanto, la expresión [II-10] se convierte en:

$$\sigma_z = M_x \cdot \frac{y}{I_x} - M_y \cdot \frac{x}{I_y} \quad \rightarrow \quad I_{xy} = 0$$

donde

$$M_x = |\vec{M}| \cos 30^\circ = 0,865 |\vec{M}|$$

$$M_y = -|\vec{M}| \sin 30^\circ = -0,5 |\vec{M}|$$

Vamos a determinar la posición del centro de gravedad y para ello vamos a tomar momentos estáticos respecto a un eje horizontal  $AB$  (fig. II-30).

$$2(60 \cdot 20 \cdot 30) + 160 \cdot 20 \cdot 70 = y_G (2 \cdot 60 \cdot 20 + 160 \cdot 20)$$

de donde  $y_G = 52,857 \text{ cm}$ .

que es la distancia desde el centro de gravedad  $O$  a la horizontal  $AB$ .

$$I_x = \frac{160 \cdot 20^3}{12} + 160 \cdot 20 (17,143)^2 + 2 \left[ \frac{20 \cdot 60^3}{12} + 20 \cdot 60 (22,857)^2 \right] = 3,021 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 160^3}{12} + 2 \left[ \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 60 \cdot (30)^2 \right] = 9,066 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Por tanto, la tensión en un punto cualquiera es:

$$\sigma_z = 0,865 |\vec{M}| \frac{y}{3,021 \cdot 10^6} + 0,5 |\vec{M}| \frac{x}{9,066 \cdot 10^6}$$

La fibra neutra la obtenemos igualando a cero la expresión anterior, con lo que resulta:

$$y = -0,193 x$$

Dibujando esta fibra neutra vemos que los puntos más alejados son el  $C(80; 27,143)$  y el  $A(-40; 52,857)$ .

Las tensiones en estos puntos, serán:

$$(\sigma_z)_C = 0,865 |\vec{M}| \frac{27,143}{3,021 \cdot 10^6} + 0,5 |\vec{M}| \frac{80}{9,066 \cdot 10^6} = \frac{12,184}{10^6} |\vec{M}|$$

a tracción:

$$(\sigma_z)_A = 0,865 |\vec{M}| \frac{(-52,857)}{3,021 \cdot 10^6} + 0,5 |\vec{M}| \frac{(-40)}{9,066 \cdot 10^6} = -\frac{17,34}{10^6} |\vec{M}|$$

a compresión

Por tanto, el máximo valor de  $|\vec{M}|$  que puede soportar la pieza, vendrá dado por el menor de los dos valores siguientes:

$$|\vec{M}| = \frac{60 \cdot 10^6}{12,184} = 49,24 \cdot 10^5 \text{ cm kg} = 49,24 \text{ mTn}$$

$$|\vec{M}| = \frac{100 \cdot 10^6}{17,34} = 57,67 \cdot 10^5 \text{ cm kg} = 57,67 \text{ mTn}$$

Es decir, en valor absoluto, el mayor momento que puede soportar la sección será: **49,24 mTn.**

Una sección de hormigón (fig. II-31) de forma cuadrada de 80 cm. de lado tiene un hueco circular de 10 cm de radio. El hormigón tiene un módulo de elasticidad de  $2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y una tensión normal admisible tanto a tracción como a compresión de  $160 \text{ kg/cm}^2$ .

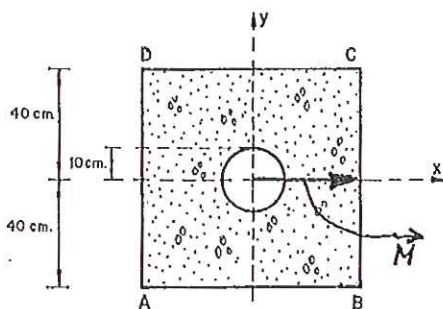


Fig. II-31

El hueco se rellena de acero de módulo de elasticidad  $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y de tensión normal admisible, tanto a tracción como a compresión de  $1200 \text{ kg/cm}^2$ , de tal manera que se supone que acero y hormigón trabajan solidariamente unidos.

Sobre la sección conjunta se aplica un momento flector  $\vec{M}$  que lleva la direc-

ción y sentido del semieje positivo Ox.

Se pide:

Valor máximo de  $|\vec{M}|$  que puede soportar la sección.

Resolución:

Como consecuencia de la actuación del momento  $\vec{M}$ , la sección tiene un giro alrededor de la fibra neutra (que en este caso coincide con el eje Ox), pasando de la posición 1-1 a la 2-2. (Figura II-32, donde en la parte (a) se ha representado la sección en verdadera magnitud y en la parte (b) de perfil).

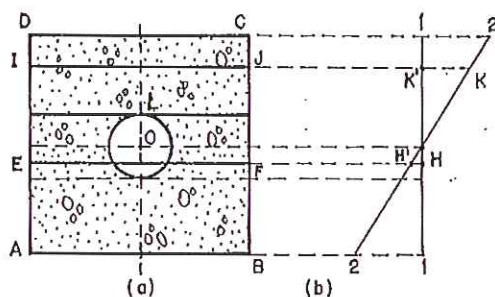


Fig. II-32

Para entender qué es lo que sucede en este caso, remitimos al lector al problema 1 de este capítulo. Vimos allí que al actuar una fuerza de compresión, el cilindro se movía paralelamente a sí mismo. Por tanto la deformación unitaria  $\epsilon$  en cualquier punto del acero y cualquier punto del hormigón, tiene que ser la misma. Sin embargo, en este caso, una fibra cualquiera como la EF (fig. II-32) ha pasado,

en perfil, de la posición H a la H', es decir, ha experimentado una deformación HH', que será la misma para todos los puntos, sean de acero, sean de hormigón, pero pertenecientes a dicha fibra. Si consideramos otra fibra cualquiera, como puede ser la IJ (fig. II-32) resulta que, en perfil, esta fibra ha pasado de la posición K a la K' y, por tanto, la deformación, si bien ha de ser la misma para todos los puntos de la fibra IJ, no ha de coincidir con la deformación de los puntos de la fibra EF.

Vemos, pues, cuál es la diferencia entre la flexión pura en una sección mixta y el esfuerzo axial en el mismo tipo de secciones. Mientras que en este segundo caso, la deformación en cualquier punto del hormigón y cualquier punto del acero, ha de ser la misma, en la flexión pura, la igualdad de deformaciones ha de cumplirse, únicamente entre puntos situados en la misma fibra (o lo que es lo mismo, en la misma paralela a la fibra neutra).

Pues bien, en este caso (igual que sucedía en el problema 1) actuará el máximo momento flector posible sobre la sección cuando, al menos, uno de los dos materiales se agote, es decir, cuando al menos, en un punto aparezca por primera vez la tensión admisible.

Para que el acero se agote, en el punto más alejado de la fibra neutra (que será el L (fig. II-32) y el simétrico respecto de Ox) tiene que existir la tensión admisible.

Pero como la igualdad de deformaciones nos da:

$$\epsilon_a = \epsilon_h \quad (\text{en puntos de la misma fibra})$$

$$\text{o bien: } \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_h}{E_h} \longrightarrow \sigma_a = 10 \sigma_h$$

resulta que si el punto L trabaja a la tensión admisible del acero, es decir, a  $1200 \text{ kg/cm}^2$ , cualquier punto del hormigón que se encuentre en la misma fibra que L tendrá que trabajar a  $120 \text{ kg/cm}^2$ , que efectivamente está por debajo de la tensión admisible del hormigón. Sin embargo, si un punto cualquiera del hormigón en la fibra pasando por L trabaja a  $120 \text{ kg/cm}^2$ , los puntos de hormigón situados en la fibra DC (o la simétrica respecto de Ox) que es la más alejada de la fibra neutra, trabajarán a una tensión:

$$\sigma = 120 \cdot \frac{40}{10} = 480 \text{ kg/cm}^2$$

que supera a la tensión admisible. Luego no puede ser el acero el material que se agote. Ha de ser, por tanto, el hormigón. Pero éste se agota, cuando en la fibra más alejada de la fibra neutra aparece la tensión admisible de  $160 \text{ kg/cm}^2$  y, por tanto, en los puntos del hormigón situados en la fibra, pasando por L, existirá una tensión

$$\sigma = 160 \cdot \frac{10}{40} = 40 \text{ kg/cm}^2$$

y en consecuencia en el punto L del acero tendremos:

$$\sigma = 400 \text{ kg/cm}^2$$

Teniendo en cuenta que los ejes  $Ox, Oy$  son principales de inercia y que  $M_y = 0$ , la expresión [II-10] se convierte en este caso en:

$$\sigma_z = M_x \cdot \frac{y}{I_x}$$

Por tanto, el momento que absorbe el acero viene dado por

$$400 = (M_x)_{\text{acero}} \cdot \frac{10}{(I_x)_{\text{acero}}}$$

$$\text{donde } (I_x)_{\text{acero}} = \frac{\pi \cdot 10^4}{4} = 0,785 \cdot 10^4 \text{ cm}^4, \text{ con lo que:}$$

$$(M_x)_{\text{acero}} = \frac{400 \cdot 0,785 \cdot 10^4}{10} = 3,14 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$$

El momento que absorbe el hormigón viene dado por:

$$160 = (M_x)_{\text{hormigón}} \cdot \frac{40}{(I_x)_{\text{hormigón}}}$$

$$\text{donde } (I_x)_{\text{hormigón}} = \frac{80^4}{12} - \frac{\pi \cdot 10^4}{4} = 340,548 \cdot 10^4 \text{ cm}^4, \text{ con lo que:}$$

$$(M_x)_{\text{hormigón}} = \frac{160 \cdot 340,548 \cdot 10^4}{40} = 136,219 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$$

El momento total que absorbe la sección es:

$$|\vec{M}| = (M_x)_{\text{acero}} + (M_x)_{\text{hormigón}} = 139,359 \cdot 10^5 \text{ cm kg} = 139,359 \text{ mTn}$$

Vemos que pese a que se está desperdiciando acero, puesto que lo estamos haciendo trabajar a una tensión menor que la admisible, no podemos aumentar el momento que actúa sobre la sección, puesto que inmediatamente se rompería el hormigón.

\*

#### Ejercicio 14.

18

La sección de hormigón ABCD, cuyas dimensiones se indican en la figura II-34 tiene un momento resistente mínimo, de valor:

$$W_{\text{mín}} = 18 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

El hormigón tiene una tensión admisible a tracción y a compresión de valor

$$\sigma_{\text{adm}} = 100 \text{ kg/cm}^2$$

y un módulo de elasticidad de  $10^5 \text{ kg/cm}^2$ .

Se quiere que la sección aguante un momento flector  $M_x$  de valor

$$M_x = 20 \text{ mTn}$$

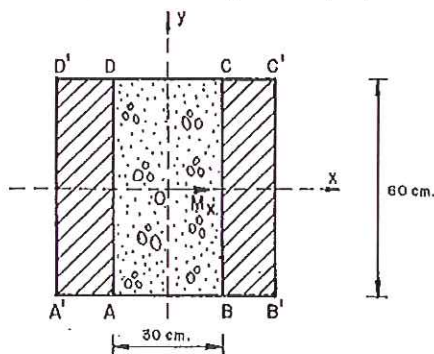


Fig. II-34

y para ello, si no es suficiente con la propia sección de hormigón, se refuerza la misma con dos placas  $DD'AA'$  y  $CC'BB'$  (fig. II-34) de acero de módulo de elasticidad de  $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y una tensión admisible de  $1200 \text{ kg/cm}^2$ , de 60 cm de altura y "a" centímetros de ancho, cada una.

Se pide:

Determinar el valor de "a" necesario para que la sección conjunta soporte al momento de 20 mTn, caso de que la sección de hormigón original, no sea suficiente.

Resolución:

Llamamos la atención del lector, sobre el hecho de que el hormigón no es un material apto para resistir esfuerzos de tracción, pero por ahora lo utilizaremos con las resistencias dadas en los enunciados de los problemas.

Vamos a comenzar comprobando si es suficiente con el hormigón, únicamente, para soportar el momento de 20 mTn.

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_x}{W_{min}} ; \quad M_x = \sigma_{m\acute{a}x} \cdot W_{min} = 100 \cdot 18 \cdot 10^3 = 18 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$$

Por tanto, la sección de hormigón sola, no puede soportar el momento de 20 mTn =  $20 \cdot 10^5$  cm kg.

La igualdad de deformaciones entre puntos de hormigón y acero situados en la misma fibra, da:

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_h}{E_h} \rightarrow \sigma_a = 20 \cdot \sigma_h$$

$\hookrightarrow \frac{E_a}{E_h}$

Luego si los puntos de hormigón situados en la fibra más alejada de la fibra neutra (eje Ox) trabajan a la tensión admisible, es decir, a 100 kg/cm<sup>2</sup>, los puntos de acero de la misma fibra tendrían que trabajar a 2000 kg/cm<sup>2</sup> cosa que no es posible, puesto que la tensión admisible del acero es 1200 kg/cm<sup>2</sup>. Por lo tanto, se agota el acero, mientras que los puntos de hormigón de tensión máxima trabajan a una tensión de:

$$\frac{1200}{20} = 60 \text{ kg/cm}^2$$

inferior a la admisible.

El momento que soporta el acero es:

$$(M_x)_{acero} = \frac{1200 \cdot (I_x)_{acero}}{30}$$

$\hookrightarrow \frac{M \cdot Y}{I}$

donde  $(I_x)_{acero} = 2 \cdot \frac{a \cdot 60^3}{12} = 36 \cdot 10^3 \cdot a \text{ cm}^4$

luego  $(M_x)_{acero} = 14,4 \cdot a \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{kg}$

El momento que soporta el hormigón es:

$$(M_x)_{hormigón} = \frac{60 \cdot (I_x)_{hormigón}}{30}$$

donde

$$(I_x)_{hormigón} = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 54 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

luego

$$(M_x)_{hormigón} = \frac{60 \cdot 54 \cdot 10^4}{30} = 10,8 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$$

Tendrá que cumplirse, pues,

$$20 \cdot 10^5 = 14,4 \cdot a \cdot 10^5 + 10,8 \cdot 10^5$$

de donde:

$$a = 0,639 \text{ cm.}$$

\*

**Ejercicio 15**

19

La sección en T, ABCDEGHF representada en la figura II-35 es de hormigón de módulo de elasticidad  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$  y de tensión admisible, tanto a tracción como a compresión de 120 kg/cm<sup>2</sup>.

Se refuerza con placas metálicas FF'HH' y EE'GG' (fig. II-35) de módulo de elasticidad  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y tensión admisible

$$\sigma_{ad} = 2400 \text{ kg/cm}^2$$

de 60 cm de altura y 4 cm de ancho, cada una.

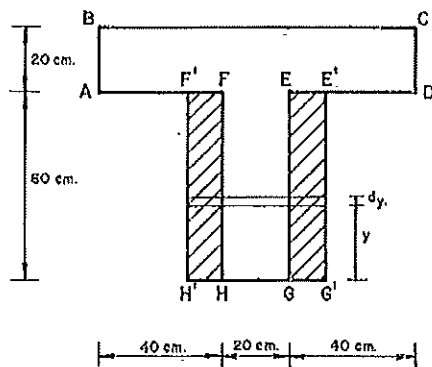


Fig. II-35

Se pide:

- 1.º) Comprobar si únicamente la sección de hormigón es capaz de resistir un momento de 36 mTn.
- 2.º) Hallar el momento que puede soportar la sección reforzada.

Resolución:

Vamos a comenzar hallando el momento flector que es capaz de resistir la sección de hormigón. Para ello obtenemos el centro de gravedad de la misma, de forma que si llamamos  $y_G$  a la distancia de aquel respecto de la fibra inferior, tenemos:

$$y_G = \frac{100 \cdot 20 \cdot 70 + 60 \cdot 20 \cdot 30}{100 \cdot 20 + 60 \cdot 20} = 55 \text{ cm}$$

El momento máximo que puede soportar la sección, producirá la tensión admisible en la fibra más alejada, del centro de gravedad. Por tanto:

$$M_{\max} = \frac{120 \cdot I_x}{55}$$

donde

$$I_x = \frac{100 \cdot 20^3}{12} + 100 \cdot 20 \cdot (15)^2 + \frac{20 \cdot 60^3}{12} + 20 \cdot 60 \cdot (25)^2 = 1,626 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

luego

$$M_{\max} = 35,49 \text{ mTn.}$$

Resulta, pues, que la sección de hormigón no es capaz de soportar por sí sola el momento de 36 mTn.

Al colocar las placas metálicas, la igualdad de deformaciones entre puntos de acero y hormigón, situados en la misma fibra, da la condición:

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_h}{E_h}$$

y sustituyendo los valores de los módulos de elasticidad, dados en el enunciado, tenemos:

$$\sigma_a = 10 \sigma_h$$

luego si el hormigón, en la fibra más alejada de la fibra neutra, trabaja a 120 kg/cm<sup>2</sup>, el acero ha de trabajar a 1200 kg/cm<sup>2</sup>, lo cual es válido puesto que la tensión admisible del acero son 2400 kg/cm<sup>2</sup>.

Sabemos que cuando toda la sección es del mismo material la fibra neutra pasa por el centro de gravedad y, hasta ahora, los problemas que hemos resuelto de secciones formadas por mate-

riales distintos, coincidía el centro de gravedad en cada uno de los materiales. Sin embargo, en este caso no ocurre así y tenemos que comenzar por la determinación de la fibra neutra del conjunto. Para ello, recuérdese que se hallaba la fibra neutra, en flexión pura con la condición de que la resultante de las fuerzas a que daban lugar las tensiones fuese nula. Si elegimos un elemento diferencial de área de ancho  $dy$  (fig. II-35), la resultante de fuerzas que actúa sobre él, será:

$$\sigma_a \cdot dA_a + \sigma_h \cdot dA_h$$

siendo  $dA_a$  y  $dA_h$ , respectivamente, las áreas de acero y de hormigón en el elemento diferencial.

Pero como  $\sigma_a = 10 \sigma_h$ , la expresión anterior se convierte en:

$$10 \sigma_h \cdot dA_a + \sigma_h dA_h = \sigma_h (10 \cdot dA_a + dA_h)$$

Vemos, pues, que si multiplicamos por la relación entre los módulos de elasticidad, el área del acero podemos considerar, toda la sección como si fuese de hormigón (pero trabajando a la tensión admisible del hormigón) siempre y cuando que se cumpla

$$(\sigma_{adm})_{acero} \geq \frac{E_a}{E_b} (\sigma_{adm})_{hormigón}$$

o trabajando a

$$\frac{(\sigma_{adm})_{acero}}{\frac{E_a}{E_b}}$$

si

$$(\sigma_{adm})_{acero} < \frac{E_a}{E_b} (\sigma_{adm})_{hormigón}$$

En nuestro caso, la sección mixta de la figura II-35 y la sección de hormigón (con una  $\sigma_{adm} = 120 \text{ kg/cm}^2$ ) de la figura II-36, absorben el mismo momento.

El momento de inercia, respecto del eje Ox, de la nueva sección es:

$$I_x = \frac{100 \cdot 80^3}{12} = 4,26 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

luego el máximo momento que absorbe la sección es:

$$M_{máx} = \frac{120 \cdot 4,26 \cdot 10^6}{40} = 127,8 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{kg} =$$

$$= 127,8 \text{ mTn.}$$

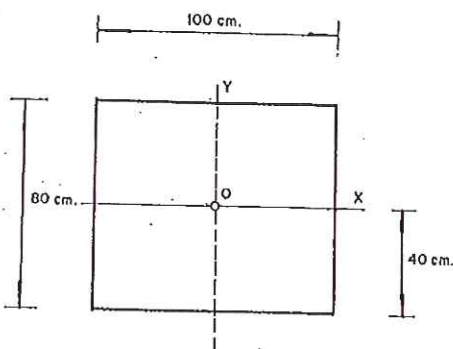


Fig. II-36

**Ejercicio 16.**

20

Sea una sección rectangular, de ancho c y canto h (fig. II-42).

Para hallar su núcleo central, tendríamos que encontrar los polos de las infinitas rectas, tangentes a la sección (que no la corten en otros puntos).

Sin embargo, mediante la propiedad de la polaridad estudiada anteriormente, sabemos que si es A el polo de (a) y B el polo de (b), los polos de todas las rectas que pasan por el punto F, intersección de (a) y (b) estarán alineados con A y B. Si conocemos pues, la parte AB del núcleo central, por simetría de la sección, respecto de los ejes Ox, Oy, tendremos todo el núcleo ABCD (fig. II-42).

Vamos entonces a hallar los polos de (a) y (b).

La recta (a) tiene de ecuación:

$$y = \frac{h}{2}$$

y puesto que los ejes Ox, Oy son principales de inercia, la ecuación general de la polar será la dada en [II-16].

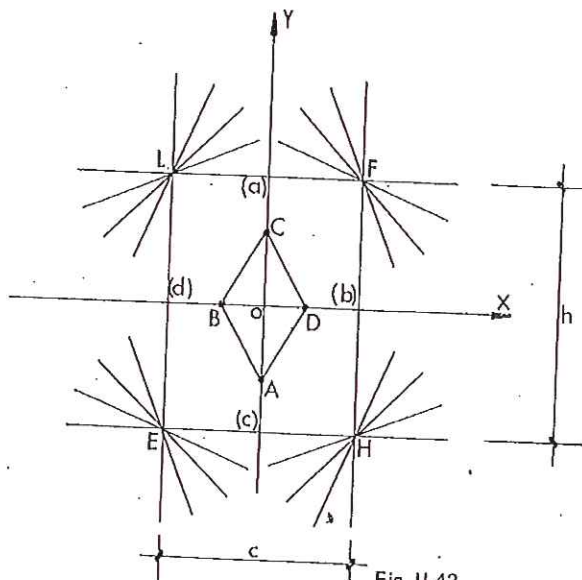


Fig. II-42

Para que las ecuaciones

$$y = \frac{h}{2} \quad " \quad \frac{ax}{I_y} + \frac{by}{I_x} + \frac{1}{\Omega} = 0$$

sean idénticas es necesario que  $a=0$ , lo cual nos da una propiedad interesante a efectos de la resolución de problemas, que es la siguiente:

Cuando una polar es paralela a un eje de la sección, su polo está sobre el otro eje.

Al ser  $a=0$ , la ecuación general de la polar queda de la forma:

$$y = -\frac{I_x}{b\Omega}$$

o identificando ambas rectas, resulta:

$$-\frac{I_x}{b \Omega} = \frac{h}{2}$$

de donde:  $b = -\frac{2 I_x}{h \Omega}$

y teniendo en cuenta, que en un rectángulo de ancho  $c$  y canto  $h$  es:

$$I_x = \frac{1}{12} c h^3 \quad \Omega = c h$$

queda  $b = -\frac{h}{6}$

Luego las coordenadas del punto A, polo de la recta (a) son

$$a = 0, \quad b = -\frac{h}{6}$$

Haciendo lo mismo con la recta (b), tenemos, como coordenadas de B

$$a = -\frac{c}{6}, \quad b = 0$$

Resulta, pues, que el núcleo central de un rectángulo de ancho  $c$  y canto  $h$ , es un rombo con las diagonales coincidiendo con los ejes de la sección y de tal manera que la diagonal según la dirección del canto vale  $\frac{h}{3}$  y la diagonal según la dirección del ancho vale  $\frac{c}{3}$ .

Como caso particular, de gran importancia práctica, vemos que si la carga  $\vec{N}$  de compresión tiene su punto de aplicación en alguno de los ejes  $Ox$ ,  $Oy$ , en tanto que la movamos sobre los tercios centrales de los mismos, no aparecerán tracciones en la sección, sea cual sea el valor de  $\vec{N}$ .

En general, siempre que la carga  $\vec{N}$  de compresión tenga punto de aplicación en el núcleo central, o en cualquier punto interior a él, la sección no soporta tracciones.

#### Ejercicio 17.

21

Hallar el núcleo central de un círculo de radio  $R$  (fig. II-43).

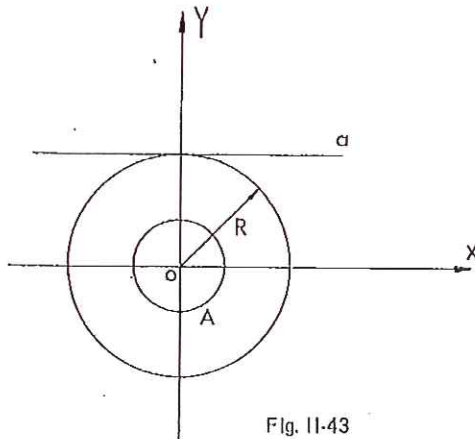


Fig. II-43

Como hay simetría respecto de cualquier eje, basta con hallar el polo A de una tangente cualquiera (a).

La ecuación de la recta (a) es:

$$y = R$$

Identificando con la ecuación de la polar, igual que hicimos en el caso anterior queda:

$$-\frac{I_x}{b \Omega} = R$$

de donde

$$b = -\frac{I_x}{R \Omega}$$

y teniendo en cuenta que en el círculo es

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4} \quad \Omega = \pi R^2$$

queda:

$$b = -\frac{R}{4}$$

de donde se deduce que el núcleo central de una sección circular es una circunferencia de radio igual a la cuarta parte del radio de la sección.

**Ejercicio 18.**

22

Hallar el núcleo central de una sección elíptica (fig. II-44) de ecuación

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

La ecuación de una tangente cualquiera (a) será:

$$-\frac{x \operatorname{sen} \alpha}{m} + \frac{y \cos \alpha}{n} - 1 = 0$$

ecuación que tendremos que identificar con la

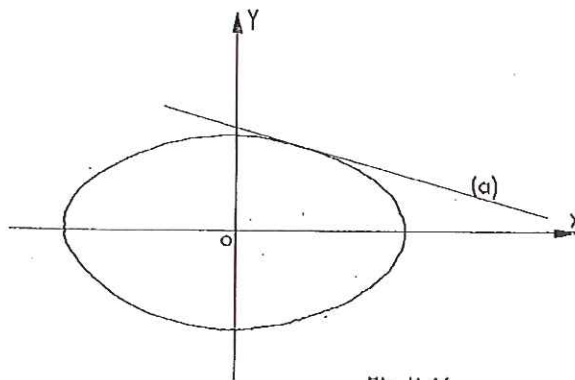


Fig. II-44.

ecuación general de la polar, referida a ejes principales de inercia:

$$\frac{ax}{I_y} + \frac{by}{I_x} + \frac{1}{\Omega} = 0$$

queda pues

$$\frac{\frac{a}{I_y}}{-\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\frac{b}{I_x}}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\Omega}$$

de donde:

$$a = \frac{I_y}{m \Omega} \operatorname{sen} \alpha$$

$$b = -\frac{I_x}{n \Omega} \cos \alpha$$

y eliminando  $\alpha$  entre ambas expresiones queda:

$$\frac{a^2}{\left(\frac{I_y}{m \Omega}\right)^2} + \frac{b^2}{\left(\frac{I_x}{n \Omega}\right)^2} = 1$$

que representa el núcleo central, que como vemos es otra elipse, de semiejes:  $\frac{I_y}{m \Omega}$ ,  $\frac{I_x}{n \Omega}$

\*

**Ejercicio 19.**

23

Hallar el núcleo central de la figura II-45.

Sea el triángulo isósceles de vértices P, Q, R referido a un sistema de ejes con el origen de coordenadas coincidiendo (como siempre) con el centro de gravedad de la sección (fig. II-45).

El núcleo central será otro triángulo cuyos vértices A, B, C serán los polos de las tangentes (a), (b), (c). Como los polos A y C estarán simétricamente dispuestos respecto del eje Oy, basta para definir el núcleo central con hallar los polos B y A.

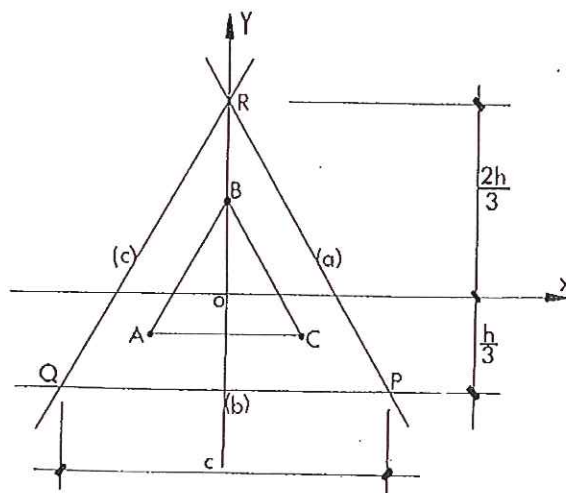


Fig. II-45

La recta (b) tiene la ecuación:

$$y = -\frac{h}{3}$$

Identificando con la ecuación general de la polar, referida a ejes principales de inercia, queda:

$$-\frac{I_x}{b \Omega} = -\frac{h}{3}$$

luego  $b = \frac{3I_x}{h \Omega}$ ,  $a = 0$ , que serán las coordenadas de B.

La recta (a) pasa por el punto  $R \left( 0, \frac{2h}{3} \right)$  y tiene una pendiente  $p = -\frac{2h}{c}$ , luego su ecuación será:

$$y + \frac{2h}{c} x - \frac{2h}{3} = 0$$

e identificando con la ecuación general de la polar:

$$\frac{1}{\frac{b}{l_y}} = \frac{\frac{2h}{c}}{\frac{a}{l_x}} = \frac{-\frac{2h}{3}}{\frac{1}{\Omega}}$$

de donde:

$$a = -\frac{3 l_y}{c \Omega} \quad b = -\frac{3 l_x}{2h \Omega}$$

que son las coordenadas de A.

### Ejercicio 20.

24

Hallar el núcleo central de la pieza de la figura II-46.

Tomamos el origen O de coordenadas coincidiendo con el centro de gravedad de la sección.

El núcleo central es un polígono cuyos vértices son los polos de las rectas (a), (b), (c), (d), (e), (f). No obstante, el polo de (c) será simétrico respecto del eje Oy, del polo de (e) y lo mismo sucede con los polos de (b) y (f), y por ello basta con hallar los polos de (a), (b), (c), (d).

Polo de la recta (a):

La ecuación de (a) es  $y = h_1$ . Identificando con la ecuación de la polar queda:

$$a = 0, \quad b = -\frac{l_x}{h_1 \cdot \Omega}$$

Polo de la recta (b):

La ecuación de (b) es  $x = q$ . Identificando con la ecuación de la polar queda:

$$a = -\frac{l_y}{q \cdot \Omega}, \quad b = 0$$

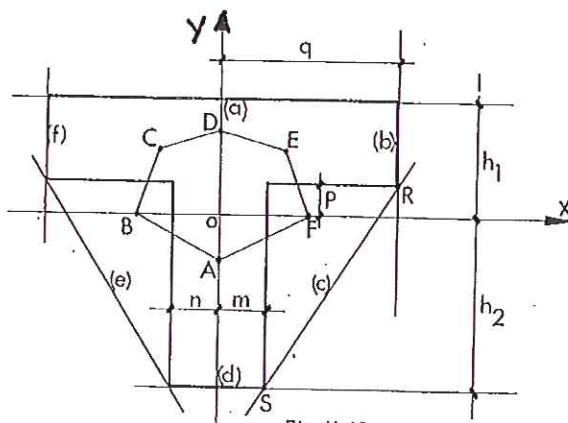


Fig. II-46

Polo de la recta (c):

La ecuación de la recta (c) que pasa por los puntos:

$$R(q, p) \quad S(m, -h_2)$$

será:

$$x(h_2 + p) + y(m - q) - (qh_2 + pm) = 0$$

e identificando con la ecuación de la polar, queda:

$$\frac{a}{h_2 + p} = \frac{b}{m - q} = \frac{1}{\Omega(qh_2 + pm)}$$

de donde:

$$a = -\frac{l_y(h_2 + p)}{\Omega(qh_2 + pm)}; \quad b = \frac{l_x(q - m)}{\Omega(qh_2 + pm)}$$

Polo de la recta (d):

La ecuación de (d) es  $y = -h_2$ .

Identificando con la ecuación general de la polar queda:

$$a = 0 \quad b = \frac{l_x}{h_2 \Omega}$$

La pieza en T, cuyas dimensiones se indican en la figura II-47, la cual es de hormigón con un módulo de elasticidad  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , con una tensión admisible a compresión de valor:

$$\sigma_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

y con una tensión admisible a tracción, nula.

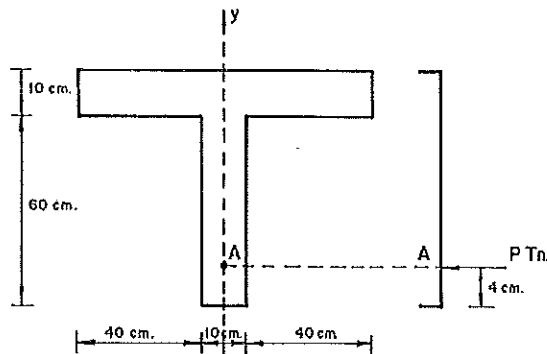


Fig. II-47

La sección está sometida a una carga  $P$  Tn de compresión, situada en un punto A del eje de simetría de la sección, que dista 4 cm de la fibra inferior.

Se pide:

- 1.º) Profundidad de la grieta que se forma.
- 2.º) Valor máximo de  $P$  que puede soportar la sección.

(Propuesto en examen en la ETSI Caminos de Madrid.)

Resolución:

Como la carga  $P$  actúa por debajo del centro de gravedad de la sección), serán las fibras superiores las que comiencen a agrietarse, al no poder soportar los esfuerzos de tracción. En el momento en que se agrietan dejan de cumplir su misión resistente y a estos efectos, desaparece toda la porción de material agrietado. Quiere esto decir, que si la grieta llega hasta la profundidad  $h$  (fig. II-48), la parte de sección EDBC es la que tiene que soportar la carga de  $P$  Tn y el resto (de puntos en la figura II-48) es como si no existiera.

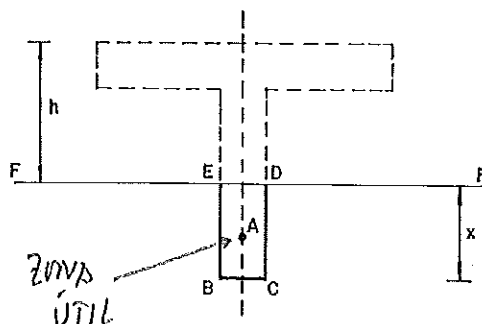


Fig. II-48

Pues bien: los puntos que estén por debajo de la fibra FF (fig. II-48) trabajarán a una compresión que irá aumentando a medida que la fibra se aleja de FF. Los puntos por encima de FF han desaparecido y precisamente los puntos de la sección, situados en la línea FF, trabajarán a tensión nula. O lo que es lo mismo, la línea FF es la polar del punto A. Dicho de otra forma: el punto A es el extremo inferior del núcleo central de la sección rectangular EDCB.

Pero como sabemos (ejercicio 16), en el rectángulo, el extremo inferior del núcleo central dista del centro de gravedad, una cantidad que en este caso (fig. II-48) valdrá:  $\frac{x}{3}$ . Por consiguiente:

$$\frac{12}{6} + 4 = \frac{x}{2}$$

de donde  $x = 24 \text{ cm}$ .

Luego la profundidad de la grieta es  $h = 70 - x = 46 \text{ cm}$ .

La tensión máxima aparecerá en la fibra BC y según [II-13], la tensión en un punto cualquiera de ella, será: (trabajando en kg y cm)

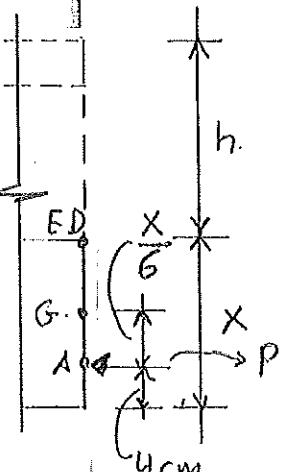
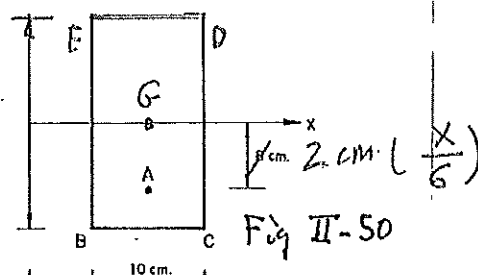
$$\sigma_z = \frac{(-P)}{10 \cdot 24^3} + (-\frac{P}{12}) \cdot \frac{(-P)}{10 \cdot 24^3} = \frac{-12}{10 \cdot 24^3} \cdot \frac{P}{12}$$

y obligando a que la tensión  $\sigma_z$  sea igual a  $-200 \text{ kg/cm}^2$  resulta:

$$P = 84000 \text{ kg} = 84 \text{ Tn}$$

$$P_2 = -P \frac{3}{120} = -200$$

$$P = -8000 \text{ kg (compresión)}$$



$$\sigma_z = -\frac{P}{10 \times 12} - \frac{2 \cdot P \cdot 12}{10 \times 12^3} = -P \left[ \frac{1}{120} + \frac{2}{120} \right] = -P \frac{3}{120}$$

La sección de una presa de gravedad es trapezoidal con las dimensiones indicadas en la figura II-51. El peso específico del material de la presa es  $\gamma = 2,5 \text{ Tn/m}^3$  y el del agua  $\gamma_a = 1 \text{ Tn/m}^3$ .

Se supone distribución hidrostática de presiones del agua sobre el paramento AB de la presa.

Se coloca un tensor EC, anclado en el punto C de la presa y el punto E del terreno.

Se pide:

Fuerza mínima que debe ejercer el tensor sobre el punto C para que, suponiendo que la barra AD no soporte esfuerzos de tracción, no se produzca grieta.

Se supone que la dimensión de la pieza, normal al plano del papel es 1 m.

Resolución:

Sobre la presa actúa, su propio peso, la

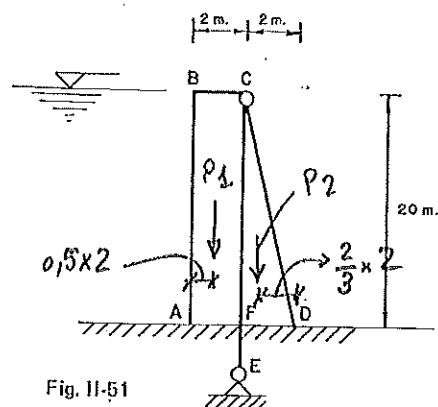


Fig. II-51

acción del tensor y la acción del agua.

Vamos a ir estudiando cada uno de ellos.

- a) El agua ejerce una ley triangular de presiones normales al parámetro AB, de tal forma que la presión máxima se ejerce en el punto A (fig. II-52) y vale:

$$P_A = \gamma \cdot h_A = 1 \cdot 20 = 20 \text{ Tn/m}^2$$

La resultante R será el volumen de presiones:

$$R = \frac{1}{2} 20 \cdot 20 = 200 \text{ Tn}$$

aplicada en el punto P (fig. II-52), tal que

$$\overline{AP} = \frac{1}{3} \overline{AB} = \frac{1}{3} 20 = 6,666 \text{ m.}$$

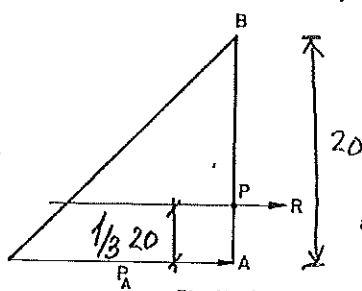


Fig. II-52

- b) El peso propio, por comodidad, vamos a descomponerlo en dos: uno el debido a la parte ABF' (fig. II-51) que valdrá:

$$P_1 = 2,5 \cdot 2 \cdot 20 = 100 \text{ Tn.}$$

y otro el debido a la parte CFD que valdrá:

$$P_2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 20 \cdot 2,5 = 50 \text{ Tn.}$$

- c) El tensor no tiene más misión que apretar la presa contra el terreno, para anular las tracciones que pudiesen existir como consecuencia del empuje del agua, ejerciendo una acción F de compresión sobre la presa.

Las acciones que se ejercen, pues, sobre la sección de base AD, serán las representadas en la figura II-53.

Todas las fuerzas son normales excepto R, que reducida a un punto cualquiera de AD, da lugar a una fuerza tangente a AD (y que por tanto, no nos interesa a efecto de la grieta puesto que suponemos en este problema, que ésta se forma por tensión normal de tracción, no por tensiones tangenciales) y además a un momento de valor

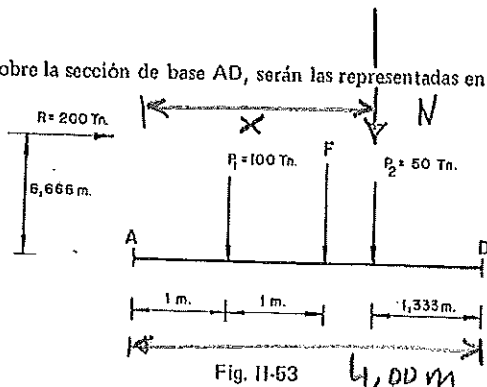


Fig. II-53

$$M = 200 \cdot 6,666 = 1333,2 \text{ m Tn.}$$

que sí que produce tensiones normales.

Por tanto, sólo nos interesa el conjunto de fuerzas M, P1, P2 y F, sistema que podremos sustituir por una fuerza única N, tal que

que  $N = P_1 + P_2 + F$  y a una distancia  $X$ , de forma y además el momento del sistema N por un lado y del sistema M, P1, P2 y F por otro, respecto de cualquier punto, sea el mismo.

Ahora bien, para que no se produzca grieta (si queremos hallar el valor mínimo de  $F$ ) es necesario que el sistema resultante  $N$  esté aplicado en el extremo del núcleo central (fig. II-54).

Obligando a que ambos sistemas den el mismo momento respecto del punto  $O$ , tenemos:

$$0 = 1333,2 - 100 \cdot 1,333 - F \cdot 0,333 + 50 \cdot 0,333$$

de donde:

$$F = 3653 \text{ kg} = 3,653 \text{ Tn.}$$

$$1749,9 \text{ kg} = 1,75 \text{ tn.}$$

Fig. II-54

Si  $N$  actúa en el extremo del núcleo central  $G_A = 0$

**Ejercicio 23.**

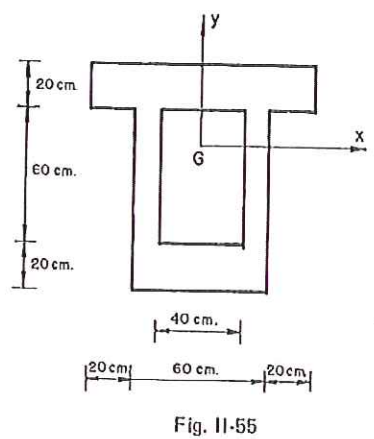
27

Dada la pieza, cuya forma y dimensiones se indican en la figura II-55 y en la que las tensiones admisibles, son:

- a compresión:  $\sigma_c = 120 \text{ kg/cm}^2$
- a tracción:  $\sigma_t = 60 \text{ kg/cm}^2$

Se pide:

Hallar la máxima distancia  $d$ , por encima del borde superior, a la que puede actuar una fuerza de compresión de 200 Tn, situada sobre el eje de simetría de la pieza.



Resolución:

Vamos a comenzar hallando el centro de gravedad  $G$  y el momento de inercia  $I_x$ .

Llamando  $y_G$  la distancia de  $G$  a la fibra inferior de la sección, tendremos:

$$y_G = \frac{100 \cdot 20 \cdot 90 + 2 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 50 + 20 \cdot 60 \cdot 10}{100 \cdot 20 + 2 \cdot 60 \cdot 10 + 20 \cdot 60} = 57,273 \text{ cm.}$$

$$I_x = \frac{100 \cdot 20^3}{12} + 100 \cdot 20 (32,727)^2 + 2 \left[ \frac{10 \cdot 60^3}{12} + 10 \cdot 60 \cdot (7,273)^2 \right] + \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 60 \cdot 20 \cdot (47,273)^2 = 5,353 \cdot 10^6$$

Las coordenadas del punto de aplicación de la carga serán

$$(0, d + 42,737) \quad 100 - 57,273$$

La tensión en la fibra superior (de la cual elegimos el punto  $(0, 42,727)$  por comodidad y puesto que la tensión en todos ellos son iguales), será: (trabajando en kg y cm) según [II-13]:

$$\sigma_z = \frac{(-200 \cdot 10^3)}{44 \cdot 10^2} + (d + 42,727) \frac{(-200 \cdot 10^3)}{5,353 \cdot 10^6} = -120$$

de donde  $d = 3,554 \text{ cm.}$

Hallando la tensión en el punto  $(0, -57,273)$ , tenemos:

$$\sigma_z = \frac{(-200 \cdot 10^3)}{44 \cdot 10^2} + (d + 42,727) \frac{(-200 \cdot 10^3)}{5,353 \cdot 10^6} = +60$$

de donde  $d = 6,554 \text{ cm.}$

El menor de los dos valores de  $d$  obtenidos es la solución buscada. Por tanto:

$$d = 3,554 \text{ cm.}$$

\*

**Ejercicio 24.**

28

La sección cuya forma y dimensiones se indican en la figura II-56 está sometida a un momento  $M_x = -2 \text{ mTn.}$

La tensión normal admisible del material que forma la sección, es tanto a compresión como a tracción, de  $80 \text{ kg/cm}^2$ .

$$M_x \cdot y$$

$$+ \frac{N}{G}$$

$$G^2 =$$

Punto de aplicación de P

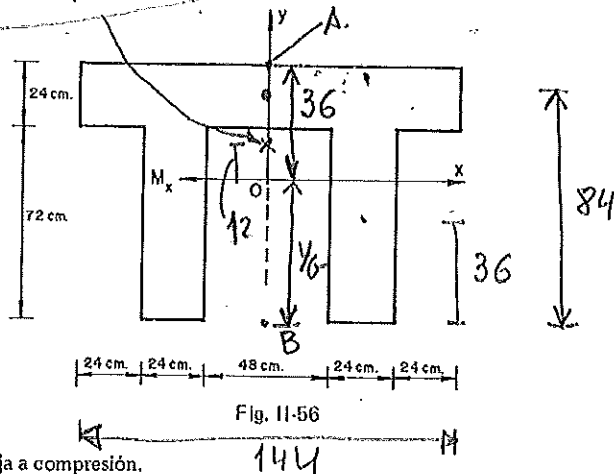
Se pide:

Determinar el máximo valor que puede tener una fuerza P, normal a la sección y de compresión, actuando en el eje de simetría y a 12 cm por encima del centro de gravedad.

(Propuesto en la ETSI de Caminos de Madrid).

Resolución:

El momento  $M_x$  produce compresiones por encima de la fibra neutra (eje Ox) y tracciones por debajo. La fuerza P produce compresiones por encima de la fibra neutra. Por lo tanto, al fibra superior es seguro que trabaja a compresión.



Llamando  $y_G$  a la distancia del centro de gravedad O, a la fibra inferior, tenemos:

$$y_G = \frac{144 \cdot 24 \cdot 84 + 2 \cdot 72 \cdot 24 \cdot 36}{144 \cdot 24 + 2 \cdot 72 \cdot 24} = 60 \text{ cm}$$

El momento de inercia respecto del eje Ox, será:

$$I_x = \frac{144 \cdot 24^3}{12} + 144 \cdot 24 \cdot (24)^2 + 2 \left[ \frac{24 \cdot 72^3}{12} + 24 \cdot 72 \cdot (24)^2 \right] = 5,64 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

En un punto de la fibra superior, que por comodidad tomaremos el de coordenada (0,36), tendremos una compresión, debida al momento, de valor absoluto: (trabajando en kg y cm)

$$M = -2 \text{ mt} = 2 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm} \quad \sigma_M = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 36}{5,64 \cdot 10^6} \quad \left( \sigma = \frac{M \cdot y}{I} \right)$$

En el mismo punto, debido a la carga P tendremos una compresión que, en valor absoluto, valdrá:

$$M_P = \text{momento en } O \text{ por } P \quad \sigma_P = \frac{P}{6912} + \frac{12 P \cdot 36}{5,64 \cdot 10^6} \quad \left( \sigma = \frac{P}{I} + \frac{M_P \cdot y}{I} \right)$$

Como la compresión total, en valor absoluto ha de ser de 80 kg/cm<sup>2</sup>, tendremos:

$$80 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 36}{5,64 \cdot 10^6} + \frac{P}{6912} + \frac{12 P \cdot 36}{5,64 \cdot 10^6}$$

$$\text{de donde } P = 303,84 \cdot 10^3 \text{ kg.} \quad \sigma_M \quad \sigma_P$$

En la fibra inferior, o tenemos compresión, en cuyo caso será más pequeña que la que existe en la fibra superior en cuyo caso no hay nada que comprobar, o tenemos tracción debido al momento de  $2 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$  y al momento de  $12 P \text{ cm kg}$ . En este caso, tenemos que asegurarnos que no sobrepasa a la admisible. La tracción en la fibra superior ( eligiendo el punto 0,60) sería:

$$\sigma_M^B \text{ Tensión en B debido a M} \rightarrow B$$

Se tienen tracciones positivas  $\rightarrow \sigma = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 60}{5,64 \cdot 10^6} + \frac{12 P \cdot 60}{5,64 \cdot 10^6} - \frac{P}{6912}$  se obtiene  $P < 0$  imposible.

Igualando a 80 kg/cm<sup>2</sup>, obtenemos: un valor de P que resulta negativo. Quiere decirse que en la fibra inferior nunca puede llegar la tracción a 80 kg/cm<sup>2</sup> luego la solución es  $P = 303,84 \cdot 10^3 \text{ kg.}$

$$\sigma_P^B \text{ Tensión en B debido a P}$$

**Ejercicio 25.**

29

32

Hallar la distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular de altura  $2h$  y ancho  $b$  (fig. II-64) debida a un esfuerzo cortante  $Q$ .

Resolución:

La expresión que da  $\tau_{0y}$  es:

$$\tau_{0y} = \frac{Q m_0}{a_0 I}$$

siendo  $m_0$  el momento estático del área situada por encima (o por debajo) de la fibra donde queremos hallar la tensión, respecto de la fibra neutra.

Por tanto:

$$m_0 = \frac{b}{2} (h^2 - y^2); \quad I = \frac{2}{3} b h^3$$

$$\tau_{0y} = \frac{3 Q (h^2 - y^2)}{4 b h^3} \quad \text{ley parabólica, con el máximo de la fibra neutra.}$$

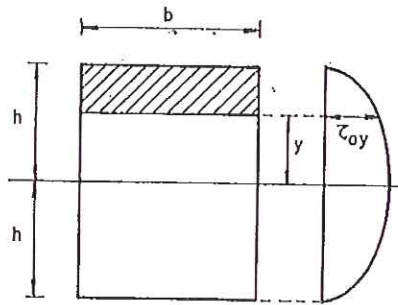


Fig. II-64

**Ejercicio 26.**

30

Hallar la distribución de tensiones tangenciales en una sección circular de radio  $R$  (fig. II-65), debida a un esfuerzo cortante  $Q$ .

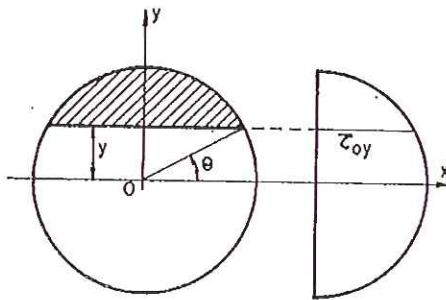


Fig. II-65

Resolución:

$$a_0 = 2 \sqrt{R^2 - y^2}; \quad I = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$m_0 = 2 \int_y^R y \sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}$$

$$\tau_{0y} = \frac{4}{3} \left( \frac{Q}{\pi R^2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{R^2} \right)$$

ley parabólica, con el máximo en la fibra neutra.

**Ejercicio 27.**

31

Hallar la distribución de tensiones tangenciales en un rombo (fig. II-66) de diagonales,  $2h$  y  $2a$  debida a un esfuerzo cortante  $Q$ .

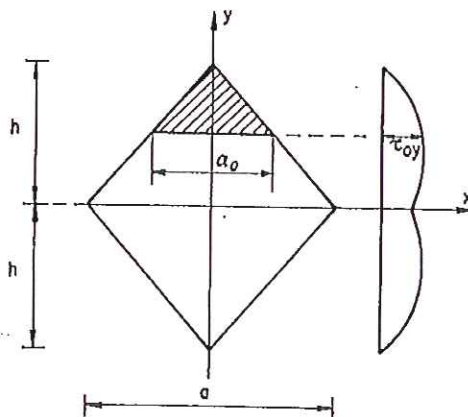


Fig. II-66

Resolución:

$$I = \frac{a h^3}{6}; \quad a_0 = a \frac{h - y}{h}$$

$$m_0 = \frac{a}{h} \int_y^h (h - y) y \, dy = \frac{1}{6} \frac{a}{h} (h - y) (h^2 + h y - 2 y^2)$$

$$\tau_{0y} = \frac{Q}{a h} \left( 1 + \frac{y}{h} - 2 \frac{y^2}{h^2} \right)$$

El máximo de  $\tau_{0y}$  se obtiene para

$$\frac{y}{h} = \frac{1}{4}$$

y este máximo vale

$$(\tau_{0y})_{\max} = \frac{9}{8} \frac{Q}{ah}$$

\*

**Ejercicio 28**

32

Hallar la distribución de tensiones tangenciales en una doble T simétrica, cuyas dimensiones se indican en la figura II-67, para un esfuerzo cortante Q.

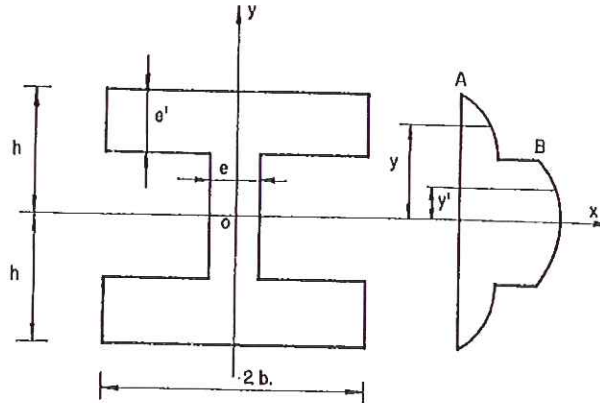


Fig. II-67

Resolución:

En este caso  $a_0$  disminuye bruscamente al pasar de las alas al alma de la viga.

Para una fibra de ordenada y tenemos:

$$a_0 = 2b$$

$$m_0 = 2b \cdot (h - y) \frac{(h + y)}{2} = b (h^2 - y^2)$$

Por tanto:

$$\tau_{0y} = \frac{Q \cdot b (h^2 - y^2)}{2b \cdot I} = \frac{Q (h^2 - y^2)}{2I}$$

Para una fibra de ordenada y' tenemos:

$$a_0 = e; \quad m_0 = 2b \cdot e' \left( h - \frac{e'}{2} \right) + e \cdot (h - e' - y') \frac{(y' + h - e')}{2}$$

La ley de distribución de tensiones se dibuja en la figura II-67.

\*

**Ejercicio 29**

33

En la sección en T cuya forma y dimensiones se indican en la figura II-68, se aplica, en el punto A una carga de  $\frac{2F}{\sqrt{2}}$  a  $45^\circ$  con la horizontal.

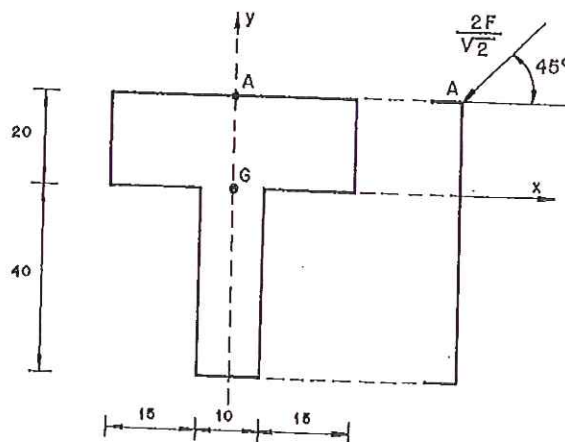


Fig. II-68

Se pide:

Suponiendo que la tensión normal admisible, tanto a tracción como a compresión es de  $80 \text{ kg/cm}^2$  y que la tensión admisible tangencial es de  $40 \text{ kg/cm}^2$ , hallar el máximo valor de  $F$  que puede soportar la sección.

Resolución:

Vamos a comenzar hallando el centro de gravedad de la sección y el momento de inercia respecto de la fibra neutra.

Llamando  $y_G$  a la distancia del centro de gravedad a la fibra inferior, tenemos (tomando momentos estáticos respecto a dicha fibra inferior):

$$y_G = \frac{40 \cdot 20 \cdot 50 + 40 \cdot 10 \cdot 20}{40 \cdot 20 + 40 \cdot 10} = 40 \text{ cm.}$$

El momento de inercia de la sección respecto de la fibra neutra será:

$$I = \frac{40 \cdot 20^3}{12} + 40 \cdot 20 \cdot (10)^2 + \frac{10 \cdot (40)^3}{12} + 10 \cdot 40 \cdot (20)^2 = 32 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

Vamos a comenzar por las tensiones normales. Podemos, o bien aplicar la ecuación [II-13], o bien reducir la componente horizontal de la carga  $F$ , al centro de gravedad de la sección, dando lugar a un axil  $F$  y a un momento  $20F$ .

En la fibra superior tenemos una compresión, que valdrá:

$$\sigma = \frac{F}{1200} + \frac{20F \cdot 20}{32 \cdot 10^4}$$

que igualada a  $80$  da una carga  $F$  de valor:

$$F = 38400 \text{ kg}$$

En la fibra inferior, habrá tracción debida al momento y compresión debida a la carga. La tracción total será:

$$\sigma = \frac{20 \cdot F \cdot 40}{32 \cdot 10^4} - \frac{F}{1200}$$

Igualando a  $80 \text{ kg/cm}^2$ , obtenemos:

$$F = 48000 \text{ kg}$$

El cortante, da una distribución de tensiones que para puntos por encima de la fibra neutra obtenemos de la siguiente manera (fig. II-69)

$$\begin{aligned} a_0 &= 40; \quad m_0 = 40(20-y) \frac{(20+y)}{2} = \\ &= 20(20^2 - y^2) \end{aligned}$$

$$I = 32 \cdot 10^4 \text{ cm}^4.$$

luego

$$\tau_{0y} = \frac{F \cdot 20(20^2 - y^2)}{40 \cdot 32 \cdot 10^4} = \frac{F \cdot (20^2 - y^2)}{64 \cdot 10^4}$$

La distribución de tensiones tangenciales por debajo de la fibra neutra, la obtendremos de la siguiente manera (figura II-70).

$$a_0 = 10; \quad m_0 = 10(40-y) \frac{(40+y)}{2} = 5(40^2 - y^2)$$

$$I = 32 \cdot 10^4$$

luego

$$\tau_{0y} = \frac{F \cdot 5(40^2 - y^2)}{10 \cdot 32 \cdot 10^4} = \frac{F(40^2 - y^2)}{64 \cdot 10^4}$$

La distribución de tensiones cortantes total, la tenemos representada en la figura II-71, dando la máxima tensión es la fibra neutra.

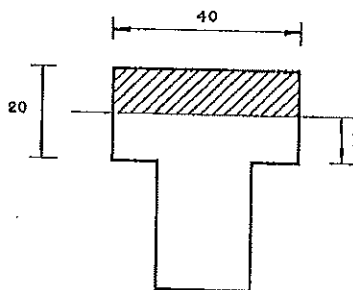


Fig. II-69

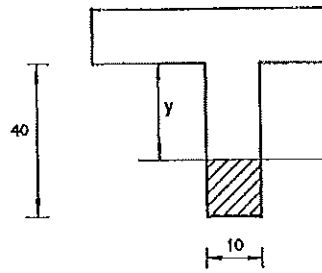


Fig. II-70

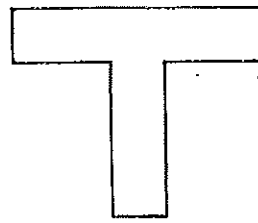
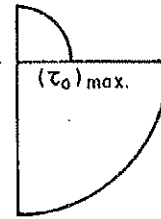


Fig. II-71



Haciendo  $y = 0$  en la última expresión tenemos:

$$(\tau_0)_{\max} = \frac{F \cdot (40)^2}{64 \cdot 10^4}$$

Iguando a la tensión tangencial admisible, obtenemos:

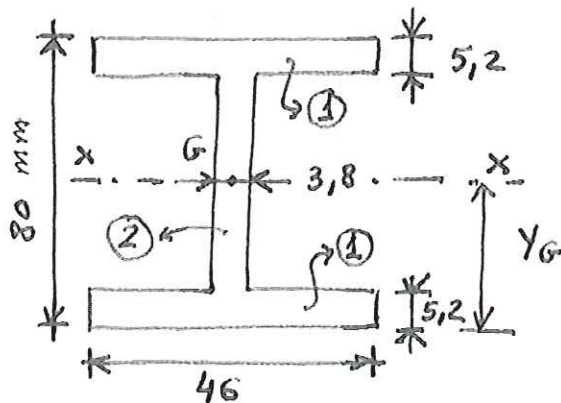
$$F = 16000 \text{ kg}$$

El menor de los tres valores de  $F$  obtenidos es el máximo que puede aguantar la sección, es decir:  $F = 16 \text{ Tn.}$

\*

EJERCICIO 30 **34**

Calcular el momento máximo de la sección si el material tiene una tensión admisible  $\sigma_{adm} = 2600 \text{ kg/cm}^2$



Resolución:

Posición del centro de gravedad  $Y_G = 40 \text{ mm}$

Calcularemos la inercia  $I_x$  mediante Steiner.

$$I_x = 2 \times \left[ \frac{1}{12} 46 \cdot (5.2)^3 + 46 \cdot 5.2 \cdot \left( 40 - \frac{5.2}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{12} 3.8 (80 - 2 \times 5.2)^3$$

INERCIA RECTANGULOS (1)

INERCIA RECTANGULO (2)

EL SEGUNDO TERMINO DE STEINER ES NULO PUES EL CENTRO DE GRAVEDAD COINCIDE CON EL DE LA SECCION COMPLETA.

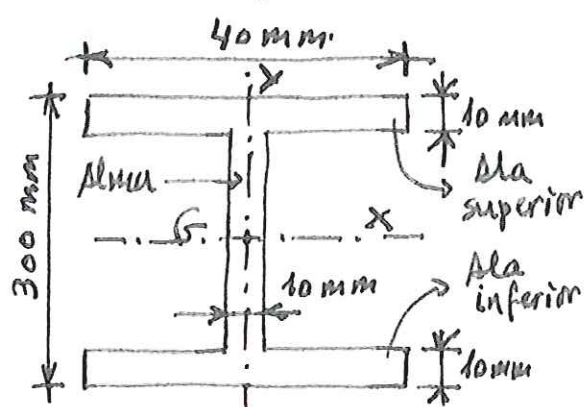
$\sigma = M \frac{Y}{I_x}$  la tensión máxima se produce en las fibras extremas para  $y = 40 \text{ mm} = 4 \text{ cm}$ .

$$\sigma_{max} = M \cdot \frac{4}{77.7} = 2600 \text{ kg/cm}^2 (\sigma_{adm})$$

$$M = 50.505,0 \text{ kg.cm} = \underline{\underline{505,05 \text{ kg.m}}}$$

### EJERCICIO 34 35

Dado el perfil de la figura sometido a flexión compuesta debido a un axil de  $-2t$ . Calcular las tensiones producidas en las fibras superior e inferior en los siguientes casos:



1) Axil aplicado en el centro de gravedad (G)

2) Axil aplicado en el eje de simetría de la sección a 100 mm del centro de gravedad

3) Igual que el punto 2) pero a 124 mm. Hallar la posición de la fibra neutra.

Resolución:

Area  $A = 2 \times 4 \times 1 + 28 \cdot 1 = 36 \text{ cm}^2$

Centro de gravedad: Dada la doble simetría de la sección, respecto al eje  $x$  y al eje  $y$ , el centro de gravedad  $G$  está en el eje de simetría  $y$  y a una distancia  $y_G = 150 \text{ mm} = 15 \text{ cm}$  respecto de la fibra inferior y superior.

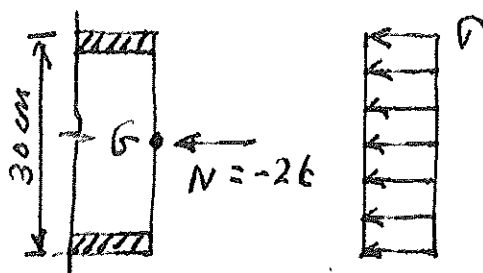
Inercia  $I_x = 2 \times \left[ \underbrace{\frac{1}{12} 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 \cdot (15 - 0,5)^2}_{\text{Alas superior e inferior}} \right] + \underbrace{\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 28^3}_{\text{Alma}}$

$I_x = 3512 \text{ cm}^4$

Como el axil dado  $N = -2t$  es negativo entonces es de compresión.

### Caso 1

Como el axil está aplicado en el centro de gravedad, se trata de un caso de una sección sometida a un axil puro, en este caso de compresión y por tanto  $M = 0$

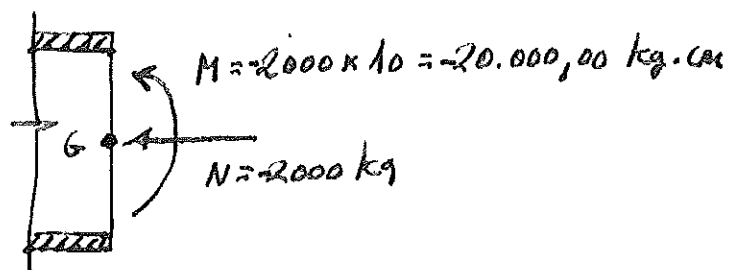
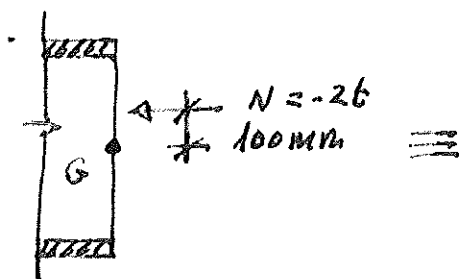


VISTA LATERAL

la tensión será constante (uniforme) en toda la sección

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-2000}{36} = -55,56 \text{ kg/cm}^2 \text{ compresión}$$

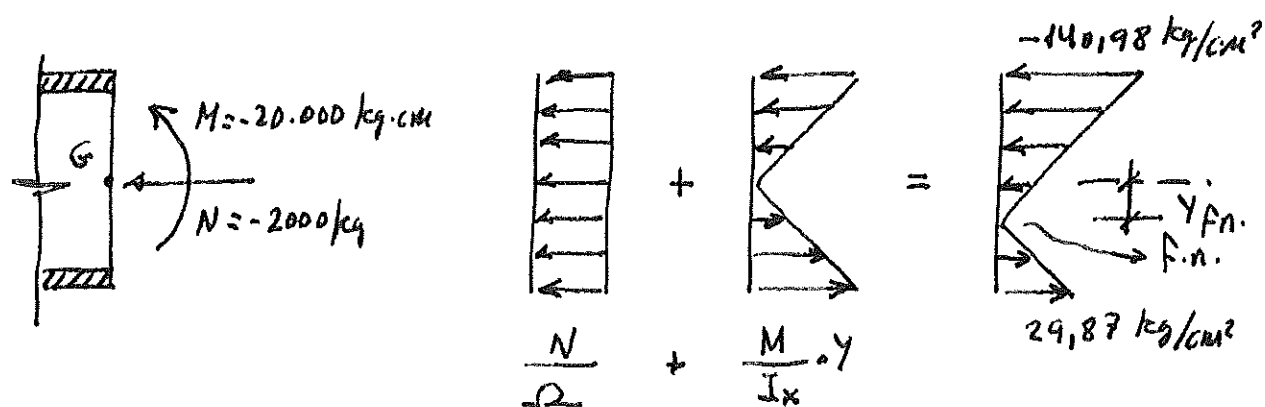
### Caso 2



sistema equivalente reducido al centro de gravedad.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_x} \cdot y \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{\text{sup}} = 15 \text{ cm} \quad \sigma = \frac{-2000}{36} + \frac{-20.000}{3512} \cdot 15 = -140,98 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compres.)} \\ y_{\text{inf}} = -15 \text{ cm} \quad \sigma = \frac{-2000}{36} + \frac{-20.000}{3512} \cdot (-15) = 29,87 \text{ kg/cm}^2 \text{ (tracción)} \end{array} \right.$$

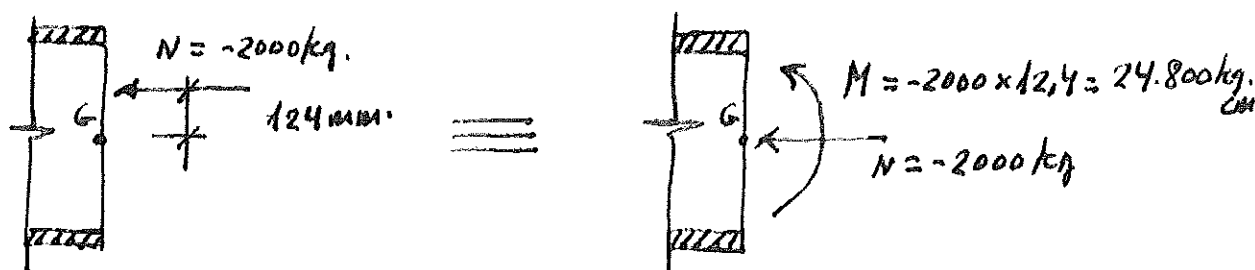
30



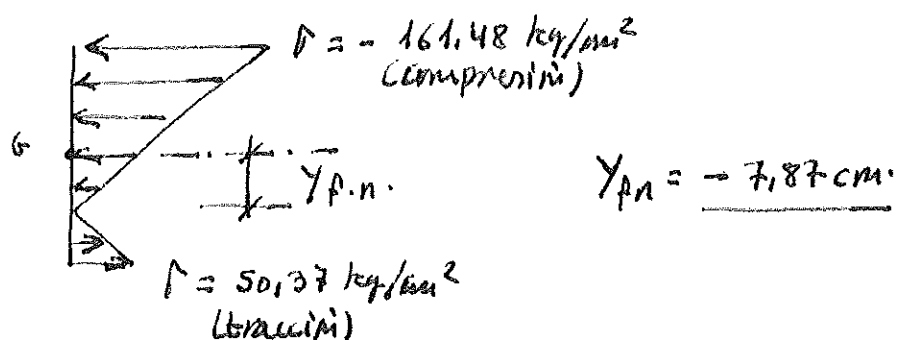
Para calcular la fibra neutra (f.n.) hacemos  $\sigma = 0.0$

$$0 = -\frac{2000}{36} + \frac{-20.000}{3512} y = 0 \quad y_{fn} = -9.76 \text{ cm. (por debajo del centro de gravedad)}$$

### Caso 3



Con estos nuevos valores de  $N$  y  $M$  se procede como en el caso 2, obteniéndose lo siguiente.

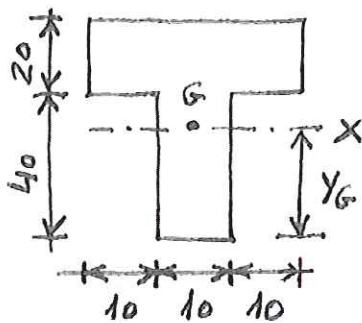


### EJERCICIO 32 36

31

La sección de la figura está sometida a un axil  $N = 75t$  de compresión y a un momento  $M$  que produce tracciones en la fibra inferior, ambos aplicados en el centro de gravedad.

(Cotas en cm)



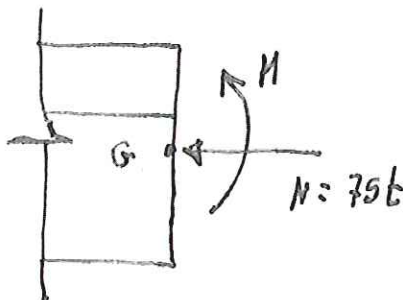
Se pide calcular el valor máximo de  $M$ , si el material no admite tracciones y la tensión máxima a compresión  $\sigma_{adm} = 200 \text{ kg/cm}^2$

#### Resolución

Como en problemas anteriores comenzamos calculando la posición del centro de gravedad  $G$  y el momento de inercia respecto al eje horizontal  $X$

$$Y_G = 38 \text{ cm.} \quad I_x = 289.333,33 \text{ cm}^4$$

$$A = 1000 \text{ cm}^2$$



$$\sigma_{adm} = 200 \text{ kg/cm}^2 = \sigma_{max.}$$

$$\sigma_{inf} = \sigma_{min} = 0 \text{ no admite tracciones}$$

$$\sigma_{sup} = 200 \text{ kg/cm}^2 = \frac{75000}{1000} + \frac{M}{289.333,33} \cdot 22 \Rightarrow$$

$\hookrightarrow y_{sup}$

$$\Rightarrow M = 1643939,38 \text{ kg.cm.} \Rightarrow \underline{16,44 \text{ Tm.}}$$

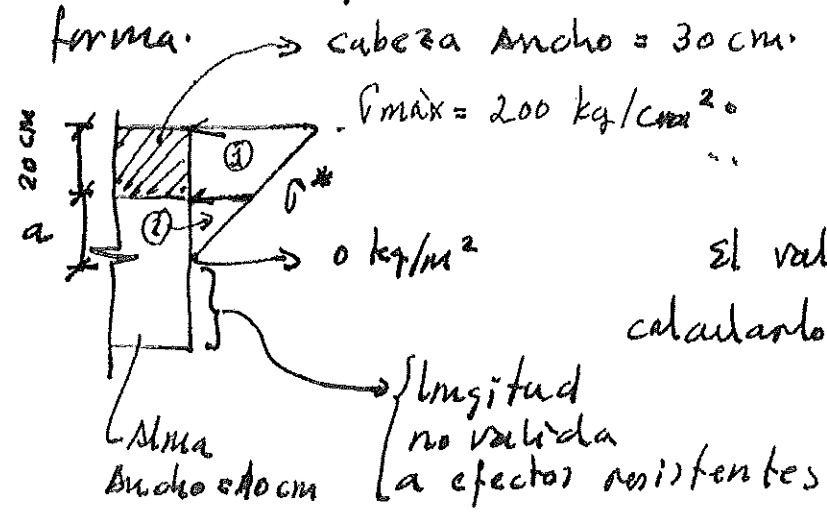
Con este valor del momento y con el valor del axil, calculamos la tensión en la fibra inferior de la sección.

$$\sigma_{inf} = \frac{75000}{1000} - \frac{1643939,38}{289335,33} \cdot 38 = -140,91 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \gamma_{inf}$$

(en este problema hemos considerado las compresiones positivas y las tracciones negativas).

Como el material no admite tracciones entonces el momento no es admisible

Las tensiones producidas en la sección debidas al axial  $N$  y al momento  $M$  tendrán la siguiente forma:



El valor de  $a$  hay que calcularlo.

De la figura y por semejanza de triángulos, se deduce  $\sigma^* \Rightarrow \frac{200}{20+a} = \frac{\sigma^*}{a} \Rightarrow \sigma^* = \frac{200 \cdot a}{20+a}$

Para calcular  $a$  hay que establecer el equilibrio de la sección:  $\text{Axil} = \sum_{1,2} \text{área} \times \text{tensiones}$

$$\text{Área} \times \text{tensiones} = \begin{cases} \textcircled{1} \text{ CABEZA} & \frac{1}{2} \left[ 200 + \frac{200 \cdot a}{20+a} \right] \times 20 \times 30 \\ \textcircled{2} \text{ ALMA} & \frac{1}{2} \frac{200 \cdot a}{20+a} \times a \times 30 \end{cases}$$

33

$$Axil = 75t = 75000 \text{ kg.}$$

luego

$$\frac{1}{2} \left[ 200 + \frac{200 \cdot a}{20 + a} \right] \times 20 \times 30 + \frac{1}{2} \frac{200 \cdot a}{20 + a} \times a \times 10 = 75000,0 \text{ kg.}$$

$$300 \times \left[ \frac{4000 + 400a}{20 + a} \right] + \frac{1000 a^2}{20 + a} = 75000,0$$

$$1.200.000 + 120.000a + 1000a^2 = 1.500.000 + 75000a$$

$$a^2 + 45a - 300 = 0 \quad \underline{a = 5,89 \text{ m.}}$$

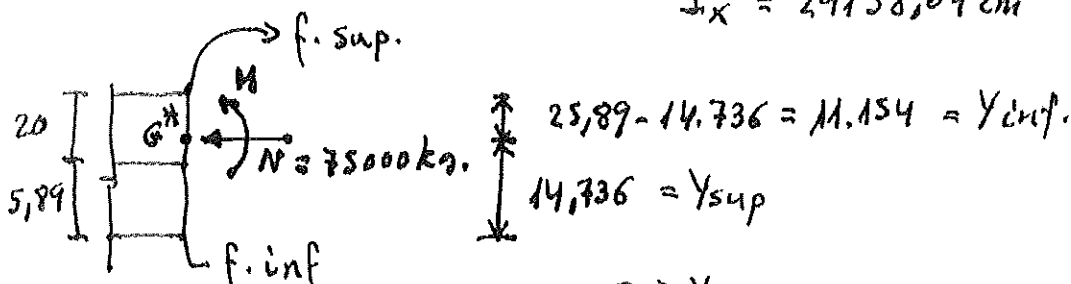
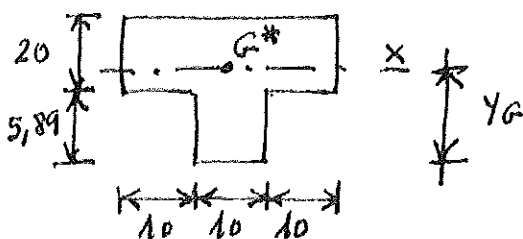
Por tanto obtenemos la nueva sección resistente:

Como en otros casos calculamos los siguientes valores.

$$A = 658,9 \text{ cm}^2$$

$$Y_G^* = 14,736 \text{ cm.}$$

$$I_x = 29158,04 \text{ cm}^4$$



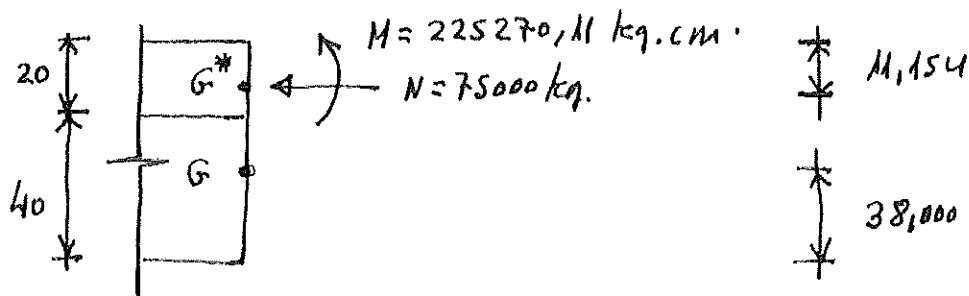
$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{75000}{658,9} + M \cdot \frac{11,154}{29158,04} = 200 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{se obtiene el valor de } \underline{M = 225270,11 \text{ kg.cm}}$$

Calculamos  $\sigma_{\text{inf.}}$  y comprobamos que es cero

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{75000}{658,9} - \frac{225270,11 \times 14,736}{29158,04} = 0 \text{ kg/cm}^2$$

34

El momento  $M$  que nos piden está aplicado en el centro de gravedad de la sección completa.



$G^*$  : centro de gravedad de la sección resistente

$G$  : " " " " " " sección completa.

Tenemos que trasladar  $(N, M)$  de  $G^*$  a  $G$

